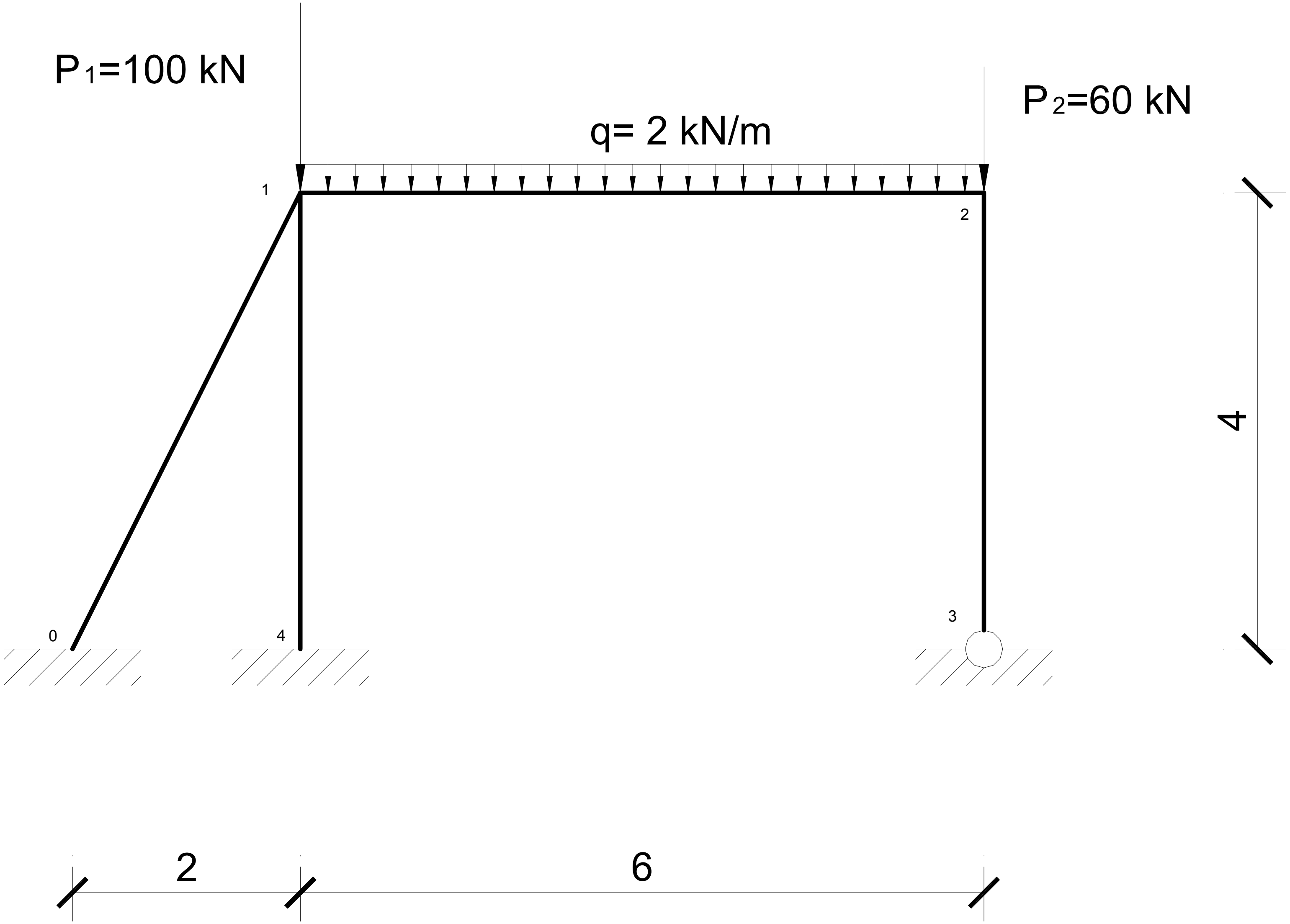
Stateczność ram – ujęcie komputerowe

Wykonał :
Wojciech Tarkowski gr. II KBI
Rok szkolny 2003/2004

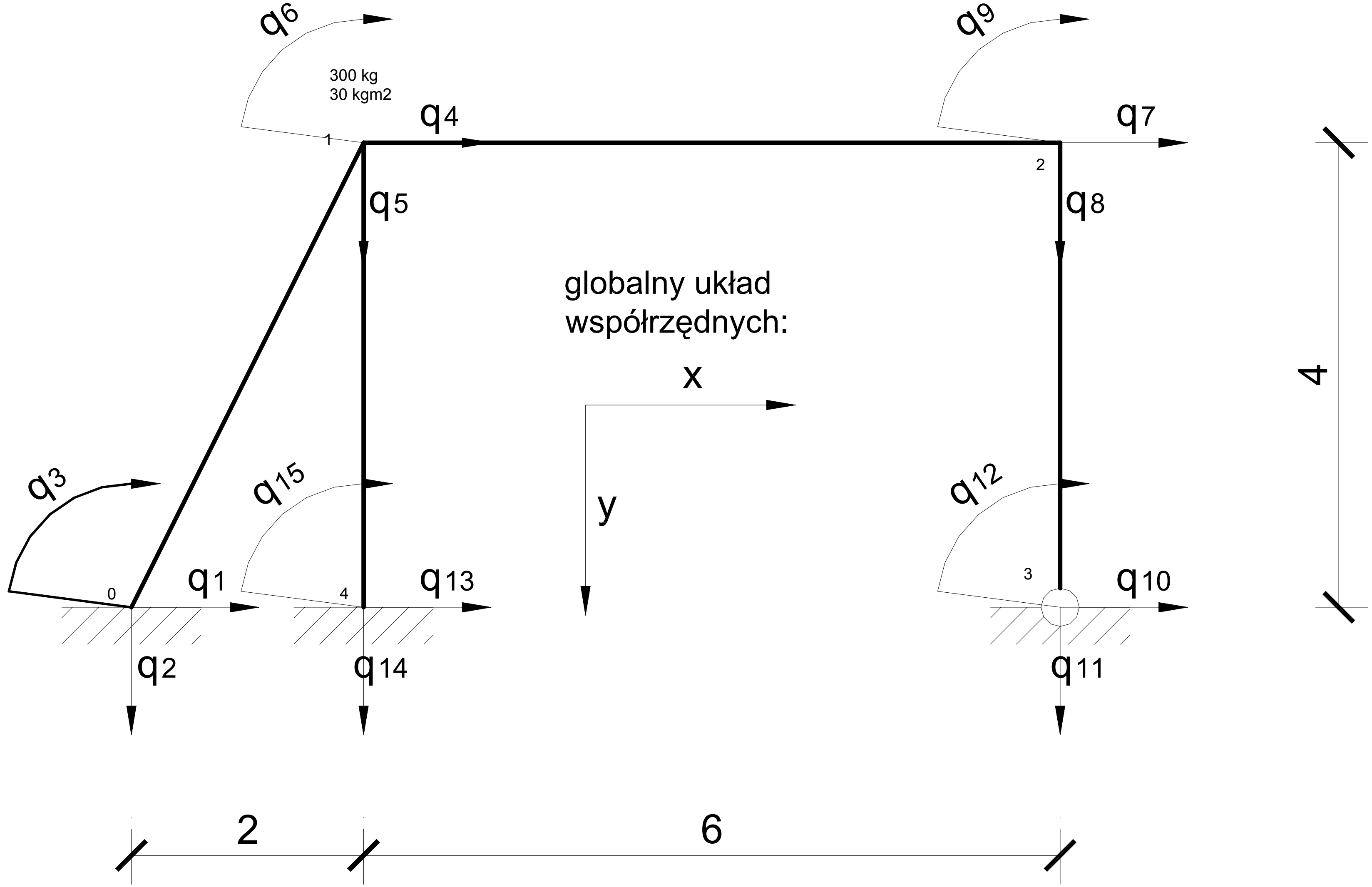
Treść zadania:

Dla przedstawionej niżej ramy proszę wyznaczyć współczynnik obciążenia krytycznego (obciążenie krytyczne), narysować postać towarzyszącą utracie przez układ stateczności oraz obliczyć przemieszczenia i siły przekrojowe uwzględniając duże siły osiowe dla obciążenia odpowiadającemu połowie obciążenia krytycznego (wykonać jedną iterację).



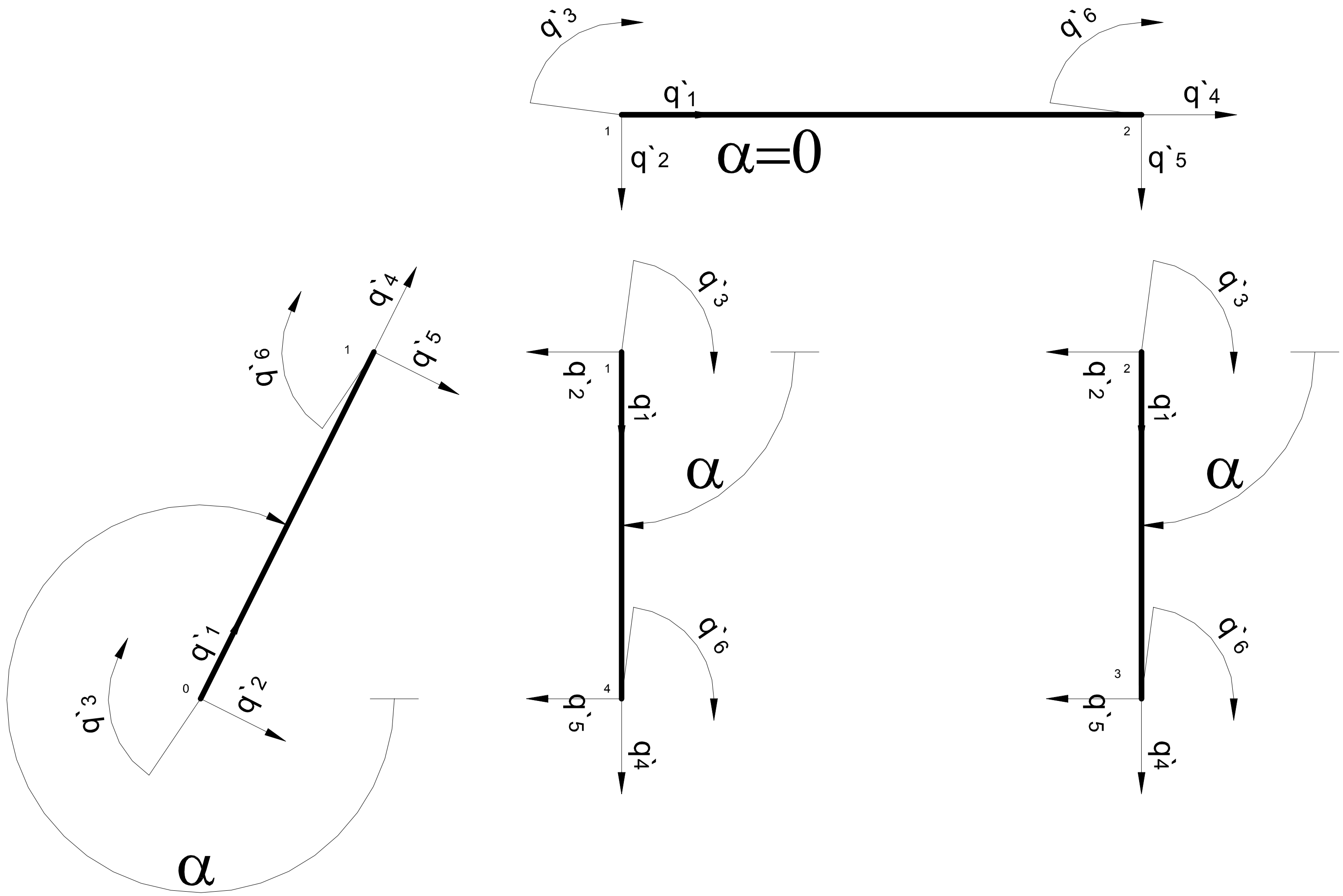
Wojciech Tarkowski gr II sem VI

Rozwiązanie:
Obieram oznaczenia zmiennych globalnych:



Wojciech Tarkowski gr II sem VI

Obieram oznaczenia zmiennych lokalnych:



α - kąt między osią główną a lokalną.

Część pierwsza: STATYKA

Metodą macierzową (komputerową) znajduję siły wewnętrzne w węzłach od zadanego obciążenia:

Pręt pierwszy (01): $l := \sqrt{20}$

Przekrój: dwuteownik **I:180**: $E := 20500\cdot 10^{4}\,\dfrac{kN}{m^2}$ $\quad I := 1450\cdot 10^{-8}\,m^4$ $\quad A := 27.9\cdot 10^{-4}\,m^2$

$EI := E\cdot I = (2972.5)\ kNm^2$

$EA := E\cdot A$

$EA = 5.72\times 10^{5}\ kN$

$$K1' := \frac{1}{l^3}\begin{pmatrix} EA\cdot l^2 & 0 & 0 & -EA\cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\cdot EI & 6\cdot EI\cdot l & 0 & -12EI & 6EI\cdot l \\ 0 & 6\cdot EI\cdot l & 4\cdot EI\cdot l^2 & 0 & -6\cdot EI\cdot l & 2\cdot EI\cdot l^2 \\ -EA\cdot l^2 & 0 & 0 & EA\cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12\cdot EI & -6\cdot EI\cdot l & 0 & 12EI & -6EI\cdot l \\ 0 & 6EI\cdot l & 2\cdot EI\cdot l^2 & 0 & -6EI\cdot l & 4EI\cdot l^2 \end{pmatrix} \qquad R0'_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformacja do układu globalnego:

$$C := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz transformacji będzie miała zatem postać:

$$T_1 := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz K1 przetransformowana:

$$K1 := T_1^T \cdot K1' \cdot T_1$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 25897.424 & -50997.242 & 797.605 & -25897.424 & 50997.242 & 797.605 \\ -50997.242 & 102393.287 & 398.803 & 50997.242 & -102393.287 & 398.803 \\ 797.605 & 398.803 & 2658.685 & -797.605 & -398.803 & 1329.342 \\ -25897.424 & 50997.242 & -797.605 & 25897.424 & -50997.242 & -797.605 \\ 50997.242 & -102393.287 & -398.803 & -50997.242 & 102393.287 & -398.803 \\ 797.605 & 398.803 & 1329.342 & -797.605 & -398.803 & 2658.685 \end{pmatrix}$$

Wektor $R0'_1$ przetransformowany:

$$R0_1 := T_1^T \cdot R0'_1$$

$$R0_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pręt drugi (12): $l := 6$

Przekrój: dwuteownik **I:240**: $E := 20500\,10^4 \frac{kN}{m^2}$ $I := 4250\,10^{-8} m^4$ $A := 46.1 \cdot 10^{-4} m^2$

$EI := E \cdot I = (8712.5)\ kNm^2$

$EA := E \cdot A$

$EA = 9.45 \times 10^5\ kN$

$$K2' := \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} EA \cdot l^2 & 0 & 0 & -EA \cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot EI & 6 \cdot EI \cdot l & 0 & -12EI & 6EI \cdot l \\ 0 & 6 \cdot EI \cdot l & 4 \cdot EI \cdot l^2 & 0 & -6 \cdot EI \cdot l & 2 \cdot EI \cdot l^2 \\ -EA \cdot l^2 & 0 & 0 & EA \cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot EI & -6 \cdot EI \cdot l & 0 & 12EI & -6EI \cdot l \\ 0 & 6EI \cdot l & 2 \cdot EI \cdot l^2 & 0 & -6EI \cdot l & 4EI \cdot l^2 \end{pmatrix}$$

$$R0'_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cdot \frac{6}{2} \\ -2 \cdot \frac{36}{12} \\ 0 \\ -2 \cdot \frac{6}{2} \\ 2 \cdot \frac{36}{12} \end{pmatrix}$$

Transformacja do układu globalnego:

$K2 := K2$ ===> układ lokalny pokrywa się z globalnym.

$R0_2 := R0'_2$

Wektor sił przywęzłowych układu:

$$R0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Pręt trzeci (23): $l := 4$

Przekrój: dwuteownik **I:180**: $E := 20500\,10^4 \frac{kN}{m^2}$ $I := 1450\,10^{-8} m^4$ $A := 27.9\cdot 10^{-4} m^2$

$EI := E\cdot I = (2972.5)\ kNm^2$

$EA := E\cdot A$

$EA = 5.72\times 10^5\ kN$

$$K3' := \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} EA\cdot l^2 & 0 & 0 & -EA\cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot EI & 3EI\cdot l & 0 & -3EI & 0 \\ 0 & 3\cdot EI\cdot l & 3EI\cdot l^2 & 0 & -3\cdot EI\cdot l & 0 \\ -EA\cdot l^2 & 0 & 0 & EA\cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & -3EI\cdot l & 0 & 3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R0'_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformacja do układu globalnego:

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Macierz transformacji będzie miała zatem postać: $$T_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz K3 przetransformowana:

$$K3 := T_3^T \cdot K3' \cdot T_3$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 139.3359375 & 0 & -557.34375 & -139.3359375 & 0 & 0 \\ 0 & 142987.5 & 0 & 0 & -142987.5 & 0 \\ -557.34375 & 0 & 2229.375 & 557.34375 & 0 & 0 \\ -139.3359375 & 0 & 557.34375 & 139.3359375 & 0 & 0 \\ 0 & -142987.5 & 0 & 0 & 142987.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wektor R0'$_3$ przetransformowany

$$R0_3 := T_3^T \cdot R0'_3$$

$$R0_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Pręt czwarty (14):</u> $l := 4$

Przekrój: dwuteownik **I:180**: $E := 20500 \cdot 10^4 \frac{kN}{m^2}$ $\quad I := 1450 \cdot 10^{-8} m^4$ $\quad A := 27.9 \cdot 10^{-4} m^2$

$EI := E \cdot I = (2972.5) \; kNm^2$

$EA := E \cdot A$

$EA = 5.72 \times 10^5 \; kN$

$$K4' := \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} EA \cdot l^2 & 0 & 0 & -EA \cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot EI & 6 \cdot EI \cdot l & 0 & -12EI & 6EI \cdot l \\ 0 & 6 \cdot EI \cdot l & 4 \cdot EI \cdot l^2 & 0 & -6 \cdot EI \cdot l & 2 \cdot EI \cdot l^2 \\ -EA \cdot l^2 & 0 & 0 & EA \cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot EI & -6 \cdot EI \cdot l & 0 & 12 \cdot EI & -6EI \cdot l \\ 0 & 6EI \cdot l & 2 \cdot EI \cdot l^2 & 0 & -6EI \cdot l & 4EI \cdot l^2 \end{pmatrix}$$

$$R0'_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Transformacja do układu globalnego:</u>

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Macierz transformacji będzie miała zatem postać:

$$T_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz K3 przetransformowana:

$$K4 := T_4{}^T \cdot K4' \cdot T_4$$

$$K4 = \begin{pmatrix} 557.34375 & 0 & -1114.6875 & -557.34375 & 0 & -1114.6875 \\ 0 & 142987.5 & 0 & 0 & -142987.5 & 0 \\ -1114.6875 & 0 & 2972.5 & 1114.6875 & 0 & 1486.25 \\ -557.34375 & 0 & 1114.6875 & 557.34375 & 0 & 1114.6875 \\ 0 & -142987.5 & 0 & 0 & 142987.5 & 0 \\ -1114.6875 & 0 & 1486.25 & 1114.6875 & 0 & 2972.5 \end{pmatrix}$$

Wektor R0'$_4$ przetransformowany:

$$R0_4 := T_4{}^T \cdot R0'_4$$

$$R0_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Globalny wektor zewnętrznych sił węzłowych układu:

$$P_w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Globalny wektor sił węzłowych układu:

$$R_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R0_{2_0} \\ R0_{2_1} \\ R0_{2_2} \\ R0_{2_3} \\ R0_{2_4} \\ R0_{2_5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R_0 =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	-6
5	-6
6	0
7	-6
8	6
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0

$$P := P_w - R_0$$

$P =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	106
5	6
6	0
7	66
8	-6
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0

Agregacja lokalnych macierzy sztywności do globalnej macierzy sztywności:

definicja macierzy: $y := 1$

$f(x, y) := 0$

$K := \mathrm{matrix}(15, 15, f)$

macierz K1:

$a := 0..5 \quad b := 0..5$

$K_{a,b} := K_{a,b} + K1_{a,b}$

macierz K2:

$a := 3..8 \quad b := 3..8$

$K_{a,b} := K_{a,b} + K2_{a-3,b-3}$

macierz K3:

$a := 6..11 \quad b := 6..11$

$K_{a,b} := K_{a,b} + K3_{a-6,b-6}$

macierz K4:

$a := 3..5 \quad b := 3..5$

$K_{a,b} := K_{a,b} + K4_{a-3,b-3}$

$c := 3..5 \quad d := 12..14$

$K_{c,d} := K_{c,d} + K4_{c-3,d-9}$

$a := 12..14 \quad b := 12..14$

$K_{a,b} := K_{a,b} + K4_{a-9,b-9}$

$c := 12..14 \quad d := 3..5$

$K_{c,d} := K_{c,d} + K4_{c-9,d-3}$

K =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	$2.59\cdot10^{4}$	$-5.1\cdot10^{4}$	797.61	$-2.59\cdot10^{4}$	$5.1\cdot10^{4}$	797.61	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$-5.1\cdot10^{4}$	$1.02\cdot10^{5}$	398.8	$5.1\cdot10^{4}$	$-1.02\cdot10^{5}$	398.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	797.61	398.8	$2.66\cdot10^{3}$	-797.61	-398.8	$1.33\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$-2.59\cdot10^{4}$	$5.1\cdot10^{4}$	-797.61	$1.84\cdot10^{5}$	$-5.1\cdot10^{4}$	$-1.91\cdot10^{3}$	$-1.58\cdot10^{5}$	0	0	0	0	0	-557.34	0	$-1.11\cdot10^{3}$
4	$5.1\cdot10^{4}$	$-1.02\cdot10^{5}$	-398.8	$-5.1\cdot10^{4}$	$2.46\cdot10^{5}$	$1.05\cdot10^{3}$	0	-484.03	$1.45\cdot10^{3}$	0	0	0	0	$-1.43\cdot10^{5}$	0
5	797.61	398.8	$1.33\cdot10^{3}$	$-1.91\cdot10^{3}$	$1.05\cdot10^{3}$	$1.14\cdot10^{4}$	0	$-1.45\cdot10^{3}$	$2.9\cdot10^{3}$	0	0	0	$1.11\cdot10^{3}$	0	$1.49\cdot10^{3}$
6	0	0	0	$-1.58\cdot10^{5}$	0	0	$1.58\cdot10^{5}$	0	-557.34	-139.34	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-484.03	$-1.45\cdot10^{3}$	0	$1.43\cdot10^{5}$	$-1.45\cdot10^{3}$	0	$-1.43\cdot10^{5}$	0	0	0	0
8	0	0	0	0	$1.45\cdot10^{3}$	$2.9\cdot10^{3}$	-557.34	$-1.45\cdot10^{3}$	$8.04\cdot10^{3}$	557.34	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	-139.34	0	557.34	139.34	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	$-1.43\cdot10^{5}$	0	0	$1.43\cdot10^{5}$	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	-557.34	0	$1.11\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0	557.34	0	$1.11\cdot10^{3}$
13	0	0	0	0	$-1.43\cdot10^{5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$1.43\cdot10^{5}$	0
14	0	0	0	$-1.11\cdot10^{3}$	0	$1.49\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0	$1.11\cdot10^{3}$	0	$2.97\cdot10^{3}$

Wykreślam wiersze odpowiedzialne za następujące zmienne:
q1, q2, q3, q10, q11, q13, q14, q15 ponieważ przemieszczenia te są równe 0.
(indeksy macierzy należy zmniejszyć o 1!!)

q1:

$a := 0 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q2:

$a := 1 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q3:

$a := 2 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q10:

$a := 9 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q11:

$a := 10 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q13:

$a := 12 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q14:

$a := 13 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

q15:

$a := 14 \quad b := 0..14$

$K_{a,b} := 0 \quad K_{b,a} := 0 \quad K_{a,a} := 1$

Ponadto zeruję odpowiednie wyrazy wektora P:

$P_0 := 0$

$P_1 := 0$

$P_3 := 0$

$P_9 := 0$

$P_{10} := 0$

$P_{12} := 0$

$P_{13} := 0$

$P_{14} := 0$

Ostatecznie macierz K będzie miała postać:

K =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	$1.84\cdot10^{5}$	$-5.1\cdot10^{4}$	$-1.91\cdot10^{3}$	$-1.58\cdot10^{5}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$-5.1\cdot10^{4}$	$2.46\cdot10^{5}$	$1.05\cdot10^{3}$	0	-484.03	$1.45\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	$-1.91\cdot10^{3}$	$1.05\cdot10^{3}$	$1.14\cdot10^{4}$	0	$-1.45\cdot10^{3}$	$2.9\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	$-1.58\cdot10^{5}$	0	0	$1.58\cdot10^{5}$	0	-557.34	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-484.03	$-1.45\cdot10^{3}$	0	$1.43\cdot10^{5}$	$-1.45\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	$1.45\cdot10^{3}$	$2.9\cdot10^{3}$	-557.34	$-1.45\cdot10^{3}$	$8.04\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Układ równań równowagi całego układu:

$q := \mathrm{matrix}(15, 1, f)$

Given

$K \cdot q = P$

$$q := \mathrm{Find}(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.001467723 \\ 0.000738362 \\ 0.001031585 \\ 0.001462651 \\ 0.000462147 \\ -0.00106769 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie równania:

$K \cdot q - P =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	-0.000000000000017
4	-0.000000000000114
5	0.000000000000035
6	$-5.99970377199166 \cdot 10^{-15}$
7	0.000000000000028
8	0.000000000000459
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0

Tworzę lokalne wektory przemieszczeń:

Dla pręta 1.
Transformuję do układu lokalnego

$$q_1 := \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} \qquad q'_1 := \left(T_1^{T}\right)^{-1} \cdot q_1$$

Dla pręta 2.
Układ lokalny pokrywa się z globalnym:

$$q_2 := \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{pmatrix} \qquad q'_2 := q_2$$

Dla pręta 3.
Transformuję do układu lokalnego

$$q_3 := \begin{pmatrix} q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \end{pmatrix} \qquad q'_3 := \left(T_3^{T}\right)^{-1} \cdot q_3$$

Dla pręta 4.
Transformuję do układu lokalnego

$$q_4 := \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{pmatrix} \qquad q'_4 := \left(T_4^{T}\right)^{-1} \cdot q_4$$

Obliczam wektory reakcji w lokalnych układach współrzędnych.

Pręt 1:

$R_1 := K1' \cdot q'_1 + R0'_1$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.51 \\ 0.26 \\ -0.09 \\ -0.51 \\ -0.26 \\ 1.28 \end{pmatrix}$$

Pręt 2:

$R_2 := K2' \cdot q'_2 + R0'_2$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -5.92 \\ -2.71 \\ -0.8 \\ -6.08 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

Pręt 3:

$R_3 := K3' \cdot q'_3 + R0'_3$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 66.081 \\ -0.799 \\ -3.195 \\ -66.081 \\ 0.799 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pręt 4:

$R_4 := K4' \cdot q'_4 + R0'_4$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 105.58 \\ 0.33 \\ 1.43 \\ -105.58 \\ -0.33 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Część druga: STATECZNOŚĆ

Poszukuję najmniejszej wartości parametru λ:

Tworzę macierze geometryczne układu:

<u>Pręt pierwszy (01):</u>

$$l := \sqrt{20}$$

$$K1'_G := \frac{(-R_1)_0}{30 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4 \cdot l^2 & 0 & -3 \cdot l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & (-l)^2 & 0 & -3l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

<u>Transformacja do układu globalnego:</u>

$$C := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz transformacji będzie miała zatem postać:

$$T_1 := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz $K1_G$ przetransformowana:

$$K1_G := T_1^T \cdot K1'_G \cdot T_1$$

$$K1_G = \begin{pmatrix} -0.111 & -0.055 & -0.046 & 0.111 & 0.055 & -0.046 \\ -0.055 & -0.028 & -0.023 & 0.055 & 0.028 & -0.023 \\ -0.046 & -0.023 & -0.307 & 0.046 & 0.023 & 0.077 \\ 0.111 & 0.055 & 0.046 & -0.111 & -0.055 & 0.046 \\ 0.055 & 0.028 & 0.023 & -0.055 & -0.028 & 0.023 \\ -0.046 & -0.023 & -0.077 & 0.046 & 0.023 & -0.307 \end{pmatrix}$$

Pręt drugi (12): $\quad l := 6$

$$K2'_G := \frac{(-R_2)_0}{30 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3 \cdot l & 0 & -36 & 3 \cdot l \\ 0 & 3 \cdot l & 4 \cdot l^2 & 0 & -3 \cdot l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3 \cdot l & 0 & 36 & -3 \cdot l \\ 0 & 3 \cdot l & -\left(l^2\right) & 0 & -3 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

Transformacja do układu globalnego:

$K2_G := K2'_G$ ===> układ lokalny pokrywa się z globalnym.

Pręt trzeci (23): $\quad l := 4$

$$K3'_G := \frac{(-R_3)_0}{30 l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 6 \cdot l & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 6 \cdot l & 6 \cdot l^2 & 0 & -6 \cdot l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -6 \cdot l & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformacja do układu globalnego:

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz transformacji będzie miała zatem postać:

$$T_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz $K3_G$ przetransformowana:

$$K3_G := T_3^T \cdot K3'_G \cdot T_3$$

$$K3_G = \begin{pmatrix} -19.8243805 & 0 & 13.2162537 & 19.8243805 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13.2162537 & 0 & -52.8650148 & -13.2162537 & 0 & 0 \\ 19.8243805 & 0 & -13.2162537 & -19.8243805 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Pręt czwarty (14):</u> $l := 4$

$$K4'_G := \frac{(-R_4)_0}{30 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3 \cdot l & 0 & -36 & 3 \cdot l \\ 0 & 3 \cdot l & 4 \cdot l^2 & 0 & -3 \cdot l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3 \cdot l & 0 & 36 & -3 \cdot l \\ 0 & 3 \cdot l & -\left(l^2\right) & 0 & -3 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

<u>Transformacja do układu globalnego:</u>

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz transformacji będzie miała zatem postać:

$$T_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz $K3_G$ przetransformowana:

$$K4_G := T_4^T \cdot K4'_G \cdot T_4$$

$$K4_G = \begin{pmatrix} -31.6729799 & 0 & 10.55766 & 31.6729799 & 0 & 10.55766 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10.55766 & 0 & -56.3075198 & -10.55766 & 0 & 14.07688 \\ 31.6729799 & 0 & -10.55766 & -31.6729799 & 0 & -10.55766 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10.55766 & 0 & 14.07688 & -10.55766 & 0 & -56.3075198 \end{pmatrix}$$

Agregacja lokalnych macierzy geometrycznych do globalnej macierzy sztywności:

definicja macierzy:

$$y := 1$$
$$f(x, y) := 0$$
$$K_G := \text{matrix}(15, 15, f)$$

macierz K1:

$a := 0..5 \quad b := 0..5$

$$K_{G_{a,b}} := K_{G_{a,b}} + K1_{G_{a,b}}$$

macierz K2:

$a := 3..8 \quad b := 3..8$

$$K_{G_{a,b}} := K_{G_{a,b}} + K2_{G_{a-3,b-3}}$$

macierz K3:

$a := 6..11 \quad b := 6..11$

$$K_{G_{a,b}} := K_{G_{a,b}} + K3_{G_{a-6,b-6}}$$

macierz K4:

$a := 3..5 \quad b := 3..5$

$$K_{G_{a,b}} := K_{G_{a,b}} + K4_{G_{a-3,b-3}}$$

$a := 12..14 \quad b := 12..14$

$$K_{G_{a,b}} := K_{G_{a,b}} + K4_{G_{a-9,b-9}}$$

$c := 3..5 \quad d := 12..14$

$$K_{G_{c,d}} := K_{G_{c,d}} + K4_{G_{c-3,d-9}}$$

$c := 12..14 \quad d := 3..5$

$$K_{G_{c,d}} := K_{G_{c,d}} + K4_{G_{c-9,d-3}}$$

$K_G =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-0.11	-0.06	-0.05	0.11	0.06	-0.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.06	-0.03	-0.02	0.06	0.03	-0.02	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0.05	-0.02	-0.31	0.05	0.02	0.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.11	0.06	0.05	-31.78	-0.06	10.6	0	0	0	0	0	0	31.67	0	10.56
4	0.06	0.03	0.02	-0.06	-0.19	-0.06	0	0.16	-0.08	0	0	0	0	0	0
5	-0.05	-0.02	-0.08	10.6	-0.06	-57.25	0	0.08	0.16	0	0	0	-10.56	0	14.08
6	0	0	0	0	0	0	-19.82	0	13.22	19.82	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0.16	0.08	0	-0.16	0.08	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-0.08	0.16	13.22	0.08	-53.5	-13.22	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	19.82	0	-13.22	-19.82	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	31.67	0	-10.56	0	0	0	0	0	0	-31.67	0	-10.56
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	10.56	0	14.08	0	0	0	0	0	0	-10.56	0	-56.31

Wykreślam wiersze odpowiedzialne za następujące zmienne:
q1, q2, q3, q10, q11, q13, q14, q15 ponieważ przemieszczenia te są równe 0.
(indeksy macierzy należy zmniejszyć o 1!!)

q1:

$a := 0 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q2:

$a := 1 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q3:

$a := 2 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q10:

$a := 9 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q11:

$a := 10 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q13:

$a := 12 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q14:

$a := 13 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

q15:

$a := 14 \quad b := 0..14$

$K_{G_{a,b}} := 0 \qquad K_{G_{b,a}} := 0 \qquad K_{G_{a,a}} := 1$

Ostatecznie macierz K_G będzie miała postać:

$K_G =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	-31.78	-0.06	10.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.06	-0.19	-0.06	0	0.16	-0.08	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	10.6	-0.06	-57.25	0	0.08	0.16	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	-19.82	0	13.22	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0.16	0.08	0	-0.16	0.08	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-0.08	0.16	13.22	0.08	-53.5	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Równanie stateczności całego układu:

Wektor λ przedstawia mnożniki, przez które należy pomnożyć zadane obciążenie, aby układ utracił stateczność. Ponieważ utrata stateczności w rzeczywistych warunkach może zdarzyć się tylko raz wybrać należy najmniejszy co do wartości mnożnik i tylko ten dalej rozważać.

UWAGA!!
Element 12 wektora a zamieniam na 1 ponieważ nie jest on istotny w dalszych rozważaniach, a ułatwi programowi MatchCAD obliczenia.

Jak widać dalsze postacie utraty stateczności (które mogły by mieć miejsce na przykład gdyby układ w pewnym miejsce "przytrzymać") są olbrzymie i z tego względu nierealne.

Definicja wektorów do obliczeń:

$q_0 := \mathrm{matrix}(15, 1, f) \qquad \lambda := \mathrm{matrix}(15, 1, f)$

Układ równań stateczności:

$$\left(K_G - \frac{1}{\lambda}K\right)q = 0$$

==> Zestawienie wartości własnych powyższego równania przedstawia wektor **a**:

$$a := \mathrm{genvals}\left(K_G, K\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -0.0088214 \\ -0.0045617 \\ -0.0027274 \\ -0.0000668 \\ -6.9178164 \times 10^{-8} \\ -1.7978799 \times 10^{-6} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$a_{11} := 1 \quad \lambda_b := \frac{-1}{a_b}$

$\lambda =$

	0
0	-1
1	-1
2	-1
3	113.3612
4	219.2188
5	366.6502
6	14980.7801
7	14455428.4452
8	556210.6725
9	-1
10	-1
11	-1
12	-1
13	-1
14	-1

Mnożnik krytyczny obciążenia wynosi: λ_{kr} = 113.3612

Macierz wektorów własnych układu - odzwierciedla wzajemną relację przemieszczeń poszczególnych węzłów układu przy utracie stateczności odpowiadającej kolejnemu mnożnikowi λ.

Q - Każda kolumna macierzy odpowiada wektorowi własnemu dla danej wartości własnej z wektora **a** i mnożnika λ):

$$Q := \mathrm{genvecs}\left(K_G, K\right) = \left(\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.128601 & -0.3304057 & -0.6311471 & 0.4819887 & 0.001229 & -0.003209 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.0294463 & -0.0740835 & -0.1281503 & 0.102929 & -0.6841136 & 0.527211 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.5076058 & 0.7899264 & -0.2422639 & 0.0881049 & -0.0001105 & -0.0022549 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.1354348 & -0.3452246 & -0.6519874 & -0.8401708 & -0.000055 & -0.001565 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.0032538 & 0.011438 & -0.0059431 & -0.0016109 & -0.7293744 & -0.8497206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.8405819 & 0.3768941 & -0.3184591 & -0.208424 & -0.0000814 & -0.0023829 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\right)$$

Wyliczenie postaci utraty stateczności układu:

Tworzę lokalne wektory przemieszczeń dla λ **= 113.3612**:

Dla pręta 1.
Transformuję do układu lokalnego:

$$q_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{3,3} \\ Q_{4,3} \\ Q_{5,3} \end{pmatrix} \quad q'_1 := \left(T_1^{\,T}\right)^{-1} \cdot q_1$$

Dla pręta 2.
Układ lokalny pokrywa się z globalnym:

$$q_2 := \begin{pmatrix} Q_{3,3} \\ Q_{4,3} \\ Q_{5,3} \\ Q_{6,3} \\ Q_{7,3} \\ Q_{8,3} \end{pmatrix} \quad q'_2 := q_2$$

Dla pręta 3.
Transformuję do układu lokalnego:

$$q_3 := \begin{pmatrix} Q_{6,3} \\ Q_{7,3} \\ Q_{8,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q'_3 := \left(T_3^{\,T}\right)^{-1} \cdot q_3$$

Dla pręta 4.
Transformuję do układu lokalnego:

$$q_4 := \begin{pmatrix} Q_{3,3} \\ Q_{4,3} \\ Q_{5,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q'_4 := \left(T_4^{\,T}\right)^{-1} \cdot q_4$$

Obliczam przemieszczenia na długości prętów:

Pręt 1 (obustronnie utwierdzony): $l := \sqrt{20}\ m$

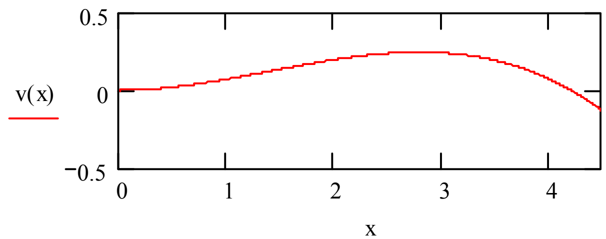
$$N_1(x) := 1 - \frac{x}{l} \qquad N_2(x) := 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_3(x) := x\cdot\left[1 - 2\cdot\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \qquad N_4(x) := \frac{x}{l} \qquad N_5(x) := 3\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_6(x) := x\cdot\left[\frac{-x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

$$u(x) := q'1_0\cdot N_1(x) + q'1_3\cdot N_4(x)$$

$$v(x) := q'1_1\cdot N_2(x) + q'1_2\cdot N_3(x) + q'1_4\cdot N_5(x) + q'1_5\cdot N_6(x)$$

wartości przemieszczenia dla pierwszej częstości dla pręta 1:

$$U := \begin{pmatrix} u\left(\frac{1}{4}\cdot l\right) \\ u\left(\frac{2}{4}\cdot l\right) \\ u\left(\frac{3}{4}\cdot l\right) \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} -0.0078 \\ -0.0156 \\ -0.0234 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} v\left(\frac{1}{4}\cdot l\right) \\ v\left(\frac{2}{4}\cdot l\right) \\ v\left(\frac{3}{4}\cdot l\right) \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0.0864 \\ 0.2197 \\ 0.2111 \end{pmatrix}$$



Pręt 2 (obustronnie utwierdzony): $l := 6\ m$

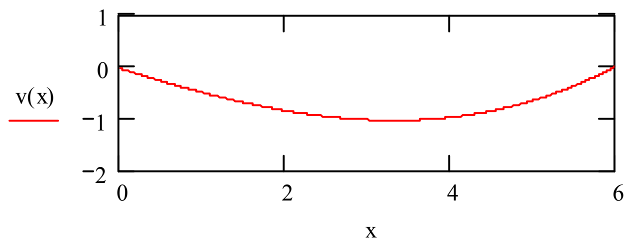
$$N_1(x) := 1 - \frac{x}{l} \qquad N_2(x) := 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_3(x) := x\cdot\left[1 - 2\cdot\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \qquad N_4(x) := \frac{x}{l} \qquad N_5(x) := 3\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_6(x) := x\cdot\left[\frac{-x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

$$u(x) := q'2_0\cdot N_1(x) + q'2_3\cdot N_4(x)$$

$$v(x) := q'2_1\cdot N_2(x) + q'2_2\cdot N_3(x) + q'2_4\cdot N_5(x) + q'2_5\cdot N_6(x)$$

wartości przemieszczenia dla pierwszej częstości dla pręta 2:

$$U := \begin{pmatrix} u\left(\frac{1}{4}\cdot l\right) \\ u\left(\frac{2}{4}\cdot l\right) \\ u\left(\frac{3}{4}\cdot l\right) \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} -0.1303 \\ -0.132 \\ -0.1337 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} v\left(\frac{1}{4}\cdot l\right) \\ v\left(\frac{2}{4}\cdot l\right) \\ v\left(\frac{3}{4}\cdot l\right) \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} -0.689 \\ -1.0242 \\ -0.8539 \end{pmatrix}$$



Pręt 4 (obustronnie utwierdzony): $\quad l := 4\ \mathrm{m}$

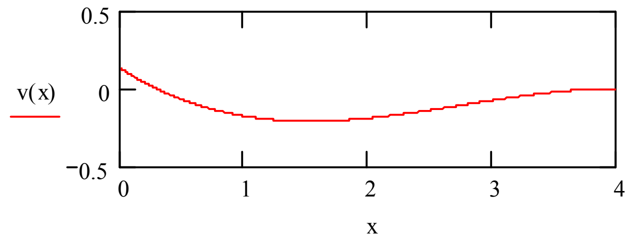
$$N_1(x) := 1 - \frac{x}{l} \qquad N_2(x) := 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_3(x) := x\cdot\left[1 - 2\cdot\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \qquad N_4(x) := \frac{x}{l} \qquad N_5(x) := 3\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_6(x) := x\cdot\left[\frac{-x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

$$u(x) := q'4_0\cdot N_1(x) + q'4_3\cdot N_4(x)$$

$$v(x) := q'4_1\cdot N_2(x) + q'4_2\cdot N_3(x) + q'4_4\cdot N_5(x) + q'4_5\cdot N_6(x)$$

wartości przemieszczenia dla pierwszej częstości dla pręta 4:

$$U := \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -0.0221 \\ -0.0147 \\ -0.0074 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} -0.177 \\ -0.1895 \\ -0.0751 \end{pmatrix}$$



Pręt 3 (przegub na prawym końcu): $\quad l := 4\ \mathrm{m}$

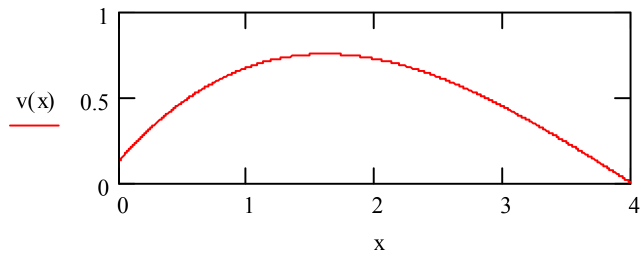
$$N_1(x) := 1 - \frac{x}{l} \qquad N_2(x) := 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad N_3(x) := x\cdot\left[1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \qquad N_4(x) := \frac{x}{l} \qquad N_5(x) := \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$u(x) := q'3_0\cdot N_1(x) + q'3_3\cdot N_4(x)$$

$$v(x) := q'3_1\cdot N_2(x) + q'3_2\cdot N_3(x) + q'3_4\cdot N_5(x)$$

wartości przemieszczenia dla pierwszej częstości dla pręta 3:

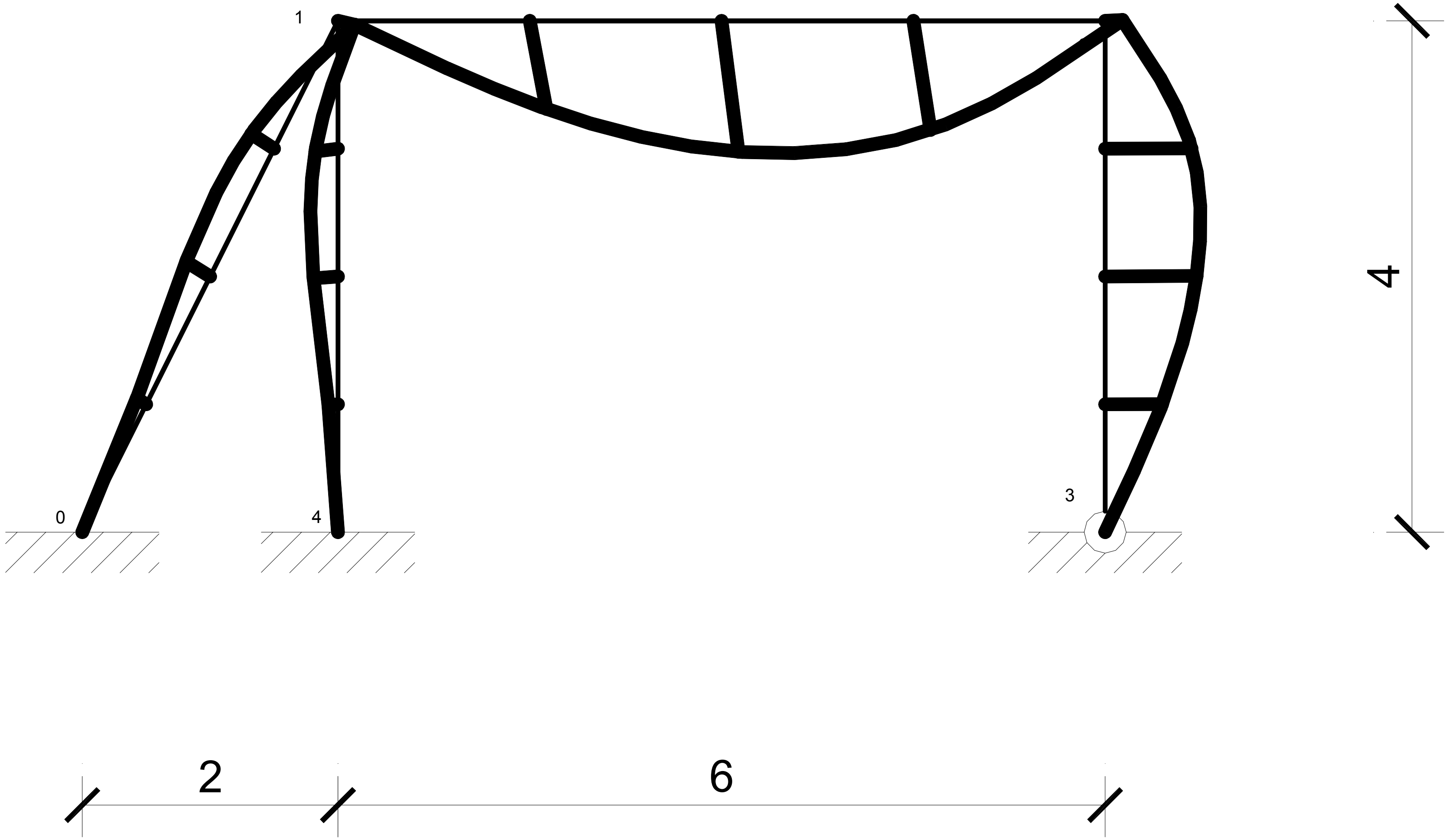
$$U := \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0.0024 \\ 0.0016 \\ 0.0008 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0.6754 \\ 0.7235 \\ 0.4438 \end{pmatrix}$$



Postać utraty stateczności układu

Postać pokrywa się z drugą wyliczoną wcześniej postacią drgań własnych.

Wartości przemieszczeń na rysunku są przeciwne do wartości obliczonych ze względu na imperfekcje (kierunek obciążenia), które powoduję, że mnożnik przemieszczeń będzie ujemny.



Wojciech Tarkowski gr II sem VI

Część trzecia:
STATYKA UKŁADU Z DUŻYMI SIŁAMI NORMALNYMI:

Poszukuję wartości przemieszczeń i sił przekrojowych uwzględniając duże siły osiowe dla obciążenia pomnożonego przez 0,5λ:
Siły przekrojowe dla poszczególnych prętów (elementów) obrazują wektory reakcji $R_{1\text{-}4}$ (patrz CZĘŚĆ I):

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.51 \\ 0.26 \\ -0.09 \\ -0.51 \\ -0.26 \\ 1.28 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -5.92 \\ -2.71 \\ -0.8 \\ -6.08 \\ 3.2 \end{pmatrix} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 66.081 \\ -0.799 \\ -3.195 \\ -66.081 \\ 0.799 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_4 = \begin{pmatrix} 105.58 \\ 0.33 \\ 1.43 \\ -105.58 \\ -0.33 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Wszystkie mnożę przez 0,5 λ, aby otrzymać aktualne obciążenie. Umieszczam dane wyjściowe w tych samych wektorach:

$\lambda_0 := 0.5 \cdot \lambda_3$

$\lambda_0 = 56.68$

$$R_1 := R_1 \cdot \lambda_0 \quad R_1 = \begin{pmatrix} 29.18 \\ 15 \\ -5.32 \\ -29.18 \\ -15 \\ 72.41 \end{pmatrix} \qquad R_2 := R_2 \cdot \lambda_0 \quad R_2 = \begin{pmatrix} 45.28 \\ -335.48 \\ -153.48 \\ -45.28 \\ -344.69 \\ 181.12 \end{pmatrix}$$

$$R_3 := R_3 \cdot \lambda_0 \quad R_3 = \begin{pmatrix} 3745.52594 \\ -45.28046 \\ -181.12183 \\ -3745.52594 \\ 45.28046 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_4 := R_4 \cdot \lambda_0 \quad R_4 = \begin{pmatrix} 5984.1449996 \\ 18.8105439 \\ 81.0722628 \\ -5984.1449996 \\ -18.8105439 \\ -5.8300874 \end{pmatrix}$$

Rozwiązuję zagadnienie statyki, przy czym zmieniam uprzednio macierz geometryczna, którą muszę uwzględnić:
W tym celu mnożę zasadnicze elementy tej macierzy przez 0,5 λ, ponieważ są one wprost proporcjonalnie zależne od siły normalnej. W tym miejscu można by było macierz K_G definiować na nowo (patrz CZĘŚĆ II), jednak efekt będzie ten sam.

$a := 3..8 \qquad b := 3..8$

$K_{G_{a,b}} := K_{G_{a,b}} \cdot \lambda_0$

i tak:

$K_G =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	-1801.51	-3.13	601.02	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-3.13	-10.62	-3.22	0	9.06	-4.53	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	601.02	-3.22	-3245.17	0	4.53	9.06	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	-1123.66	0	749.11	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	9.06	4.53	0	-9.06	4.53	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-4.53	9.06	749.11	4.53	-3032.65	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Macierz K_X to suma macierzy sztywności K i geometrycznej K_G:

$$K_X := K + K_G$$

UWAGA!

Podobną operację jak w przypadku macierzy sztywności K_G (mnożenie przez λ_0 - ponieważ jej wartość też jest liniowo zależna od obciążenia zewnętrznego) dokonuję z wektorem globalnym sił węzłowych układu, ale robię to już przy rozwiązywania układu równań..

Układ równań równowagi całego układu:

$q := \mathrm{matrix}(15, 1, f)$

Given

$K_X \cdot q = \lambda_0 \cdot P$

$$q := \mathrm{Find}(q) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.109784467 \\ 0.047632839 \\ 0.10773263 \\ 0.110647825 \\ 0.025896157 \\ -0.141180191 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie równania:

$K_X \cdot q - \lambda_0 \cdot P =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0.000000000000027
4	-0.000000000000909
5	-0.000000000000057
6	-0.000000000001675
7	0.000000000000455
8	0.000000000000057
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0

Należy jeszcze znaleźć odpowiadające tym przemieszczeniom siły przekrojowe:

Tworzę lokalne wektory przemieszczeń:

Transformuję do układu lokalnego

$$q_1 := \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} \quad q'_1 := \left(T_1{}^T\right)^{-1} \cdot q_1$$

Układ lokalny pokrywa się z globalnym:

$$q_2 := \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{pmatrix} \quad q'_2 := q_2$$

Transformuję do układu lokalnego

$$q_3 := \begin{pmatrix} q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \end{pmatrix} \quad q'_3 := \left(T_3{}^T\right)^{-1} \cdot q_3$$

Transformuję do układu lokalnego

$$q_4 := \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{pmatrix} \quad q'_4 := \left(T_4{}^T\right)^{-1} \cdot q_4$$

Obliczam wektory reakcji w lokalnych układach współrzędnych. Korzystam z definicji macierzy z CZĘŚCI I, dlatego poszczególne wektory lokalne mnożę przez λ_0.

Pręt 1:
$R_1 := \left[K1' + \left(\lambda_0 \cdot K1'_G\right)\right] \cdot q'_1 + \lambda_0 \cdot R0'_1$

Pręt 2:
$R_2 := \left[K2' + \left(\lambda_0 \cdot K2'_G\right)\right] \cdot q'_2 + \lambda_0 \cdot R0'_2$

Pręt 3:
$R_3 := \left[K3' + \left(\lambda_0 \cdot K3'_G\right)\right] \cdot q'_3 + \lambda_0 \cdot R0'_3$

Pręt 4:
$R_4 := \left[K4' + \left(\lambda_0 \cdot K4'_G\right)\right] \cdot q'_4 + \lambda_0 \cdot R0'_4$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -830.402 \\ 49.036 \\ 37.47 \\ 830.402 \\ -49.036 \\ 178.34 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} -135.99 \\ -378.18 \\ -98.06 \\ 135.99 \\ -301.99 \\ -129.51 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 3702.827 \\ 135.986 \\ 129.51 \\ -3702.827 \\ -135.986 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_4 = \begin{pmatrix} 6810.901 \\ 191.522 \\ -80.277 \\ -6810.901 \\ -191.522 \\ 189.397 \end{pmatrix}$$

Ponieważ zakończyć mam na pierwszej iteracji nie przeprowadzam dalej już poszukiwania dokładniejszej wartości sił wewnętrznych.

Sprawdzenie statyczne:

Odcinam węzły 1 i 2 i sprawdzam sumę po kierunku pionowym (Y):

$$a := \left(-R_1\right)_0 \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} + {R_1}_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} - \left(R_3\right)_0 - {R_4}_0 + 100 \cdot \lambda_0 + 60 \cdot \lambda_0 + (2 \cdot 6) \cdot \lambda_0$$

$$a = 0.000000000000796$$

Zestawienie sił normalnych:

	Jednostka	**Pręt 1. (01)**	**Pręt 2. (12)**	**Pręt 3. (23)**	**Pręt 4. (14)**
Statyka	[kN]	- 0,51	- 0,8	- 66,081	- 105,58
Połowa obciążenia krytycznego **bez uwzględnienia** wpływu sił normalnych	[kN]	- 29,18	- 45,28	- 3745,526	- 5984,145
Połowa obciążenia krytycznego **z uwzględnieniem** wpływu sił normalnych	[kN]	830,402	- 135,99	- 3702, 827	- 6810,901